

مبحث : معرفی ماتریس / کاربرد ماتریس

نام دبیر: مهندس سامان اسپهرم
نام دوره: نوروز
شماره جلسه: جلسه اول
نام درس و مقطع و رشته: هندسه ۳ - دوازدهم
ریاضی، فیزیک
تاریخ جلسه: ۱۴۰۲/۱/۸

نام کتاب	من در کلاس حل می کنم					خودتان حل کنید (در منزل یا کار در کلاس)				
کتاب درسی										
کتاب آبی	۳۲	۵۶	۶۲			۱۳	۲۳	۵۲	۶۱	۶۵
کتاب نوروز	۵۲۵	۵۳۰	۵۳۵			۵۲۱	۵۲۳	۵۲۹	۵۳۴	۵۴۰



ماتریس:

تعدادی عدد یا حرف در یک آرایش سطری و ستونی، یک «ماتریس» تشکیل داده و هر یک از آن اعداد، یک «درایه» هستند.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

سطر اول
سطر دوم
ستون اول
ستون دوم
ستون سوم

ماتریس بالا دارای ۲ سطر و ۳ ستون و از «مرتبه‌ی ۲×۳» است.

در ماتریس $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ به صورت $b_{ij} = \begin{cases} 3i-2 & i < j \\ -i^2+2j & i \geq j \end{cases}$ مجموع درایه‌ها کدام است؟

۵ ④

۳ ③

صفر ②

-۲ ①

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی
قطر فرعی

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس همانی

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر

مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر 3×3 برابر ۱ است. حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی این ماتریس کدام است؟

$\frac{1}{27}$ ④

۲۷ ③

۸ ②

$\frac{1}{8}$ ①

نکته

تساوی ماتریس‌ها:

دو ماتریس A و B «هم‌مرتبه» هستند، هرگاه تعداد سطرها و تعداد ستون‌های آن‌ها برابر باشند. بعلاوه، این دو ماتریس برابرند و می‌نویسیم: $A = B$ ، هرگاه:

- اولاً: هم‌مرتبه باشند و
- ثانیاً: درایه‌های نظیر در دو ماتریس برابر باشند.

اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times k}$ و $A = B$ باشد، آنگاه حاصل $m+n+k$ کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} m & 3 & 4 \\ 4 & n-1 & 8 \\ 6 & 9 & k+1 \end{bmatrix}$$

۲۵ ④

۱۶ ③

۲۰ ②

۶ ①



نکته

جمع و تفریق:

جمع و تفریق دو ماتریس هم‌مرتبه $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ با استفاده از درایه‌های متناظر در A و B انجام می‌شود:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \quad \text{و} \quad A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$$

ضرب عددی:

اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ یک ماتریس و r عددی دلخواه باشد، ماتریس rA ماتریسی هم‌مرتبه‌ی A است که از ضرب عدد r در تمام درایه‌های ماتریس A بدست می‌آید: $rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$. برای نمونه:

$$-2 \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -8 & -10 & 4 \end{bmatrix}$$

نام دیگر این نوع ضرب، «ضرب اسکالر» است.

ویژگی‌های جمع و تفریق:

اگر A ، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند:

- همواره $A + B = B + A$ است، یعنی جمع ماتریس‌ها جابجایی است؛ ولی: $A - B \neq B - A$.
- اگر $\overline{0}$ ماتریس صفر هم‌مرتبه‌ی A باشد، آنگاه: $A + \overline{0} = \overline{0} + A = A$.
- خاصیت شرکت‌پذیری برقرار است:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

ویژگی‌های ضرب عددی:

موارد زیر به آسانی از تعریف این نوع ضرب حاصل می‌شوند:

- $A = \overline{0}$ ، $r\overline{0} = \overline{0}$ و $1A = A$.
 - اگر r یک عدد و A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند:
- $$r(A + B) = rA + rB$$
- اگر r و s دو عدد دلخواه باشند:
- $$(r + s)A = rA + sA$$

❖ A یک ماتریس اسکالر 3×3 است به طوری که $2A = 3B = -\frac{1}{2}C$. اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A + B + C$ برابر -7 باشد، ماتریس A کدام است؟

④ $-\frac{7}{3}I$

③ $\frac{2}{3}I$

② $2I$

① I

نکته

گام اول:

ضرب یک سطر در یک ستون (با شرط: تعداد درایه‌های برابر) به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_p & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_p \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_pb_p + \dots + a_nb_n$$

گام دوم:

ضرب یک سطر در یک ماتریس دلخواه، به ترتیب از ضرب آن سطر در تمام ستون‌های ماتریس دوم بدست می‌آید.

بعلاوه:

جواب‌های به‌دست آمده به ترتیب، در یک ماتریس سطری قرار می‌گیرند.

گام سوم:

در حالت کلی، ضرب ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ در $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ ، از ضرب هر یک از سطرها‌ی ماتریس اول در هر یک از ستون‌های ماتریس دوم بدست می‌آید. به عبارت دقیق‌تر:

اگر $C = AB$ ، آنگاه درایه‌ی c_{ij} از ماتریس C عبارت است از:

$$c_{ij} = \text{سطر } i \text{ ام } A \times \text{ستون } j \text{ ام } B$$



❓ برای $A = \begin{bmatrix} 2 & a-b \\ -3 & 2b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، در بین ماتریس‌های AB و BA ، فقط یکی قطری است. اختلاف درایه‌های قطر اصلی در ماتریس غیر قطری کدام است؟

۹ ④

۱۲ ③

۶ ②

۳ ①

❓ از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ ، عدد غیر صفر x کدام است؟ (کنکور ۹۸)

$\frac{3}{5}$ ④

$\frac{4}{9}$ ③

$\frac{3}{8}$ ②

$\frac{2}{9}$ ①

نکته

فرض کنید در ضرب ABC ، یک درایه‌ی دلخواه خواسته شود؛ در این صورت:
لازم نیست ضرب AB یا BC به صورت کامل انجام شود!
بلکه کافی است به صورت زیر عمل کنید:

ستون j ام $C \times B \times$ سطر i ام $A =$ درایه‌ی ij -ام ماتریس ABC

❓ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 1 & b & -2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر در ماتریس AB ، درایه‌های پایین قطر اصلی صفر باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

۸ ④

۴ ③

-۴ ②

-۸ ①

نکته

ویژگی‌های ضرب:

- به شرط آن که ضرب‌ها قابل انجام باشند، موارد زیر را داریم:
- $A \times B$ و $B \times A$ ممکن است برابر نباشند؛ یعنی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد.
- $A\overline{O} = \overline{O}A = \overline{O}$ و $AI = IA = A$.
- $A(B+C) = AB+AC$ و $A(B-C) = AB-AC$. یعنی ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر است.
- خاصیت شرکت‌پذیری برای ضرب برقرار است؛ یعنی اگر ضرب‌های زیر ممکن باشند، تساوی برقرار است:
 $(AB)C = A(BC)$

توجه کنید:

شکل عمومی‌تر خاصیت ضربی ماتریس‌های هم‌اندازه در ماتریس A از مرتبه‌ی $m \times n$ چنین است:
 $I_m A = A$ و $A I_n = A$

بِعَلَاوه:

- موارد زیر، به مهم‌ترین خواصی که در ماتریس‌ها برقرار نیستند، اشاره دارند:
- اگر $AB = \overline{O}$ باشد، آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت که $A = \overline{O}$ یا $B = \overline{O}$. یعنی ممکن است ضرب دو ماتریس غیر صفر، برابر صفر شود.
- قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست. یعنی از تساوی $AB = AC$ ، حتی با شرط $A \neq \overline{O}$ ، نمی‌توان نتیجه گرفت که $B = C$.
- چنان که گفته شد، **ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد**.
یعنی اگر ضرب‌های AB و BA انجام شوند، آنگاه:
ممکن است تساوی $AB = BA$ برقرار باشد یا برقرار نباشد. (فقط گاهی برقرار است).



نکته

توان رسانی ماتریس:

ضرب یک ماتریس A در خودش فقط وقتی امکان دارد که آن ماتریسی مربعی باشد. در این صورت:

«ماتریس $A \times A$ را با A^2 نشان می‌دهیم.»

با ادامه‌ی این روند، توان‌های بزرگ‌تر ماتریس معلوم می‌شوند:

$$A^2 \times A = A^3, A^3 \times A = A^4, \dots, A^n \times A = A^{n+1}$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & a \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $A^2 = A$ ، آنگاه مقدار ax کدام است؟

۴ ④

۲ ③

۲ ②

۴ ①

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 کدام است؟ (کنکور ۹۹)

$[30 \ 6 \ 78]$ ②

$[30 \ 6 \ 64]$ ①

$[30 \ 6 \ 86]$ ④

$[24 \ 8 \ 86]$ ③

نکته

توان رسانی ماتریس دلخواه:

برای محاسبه‌ی توان‌های یک ماتریس مربعی A ، ماتریس‌های A^2 ، A^3 و ... را تا آنجا تعیین می‌کنیم که:

○ به ماتریس همانی I یا ماتریسی بر حسب آن برسیم؛ یا

○ یک نظم در توان‌های ماتریس مشاهده شود.

سپس می‌توان هر توانی از A را مشخص نمود.

نکته

توان رسانی ماتریس قطری:

اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای به توان رساندن A ، کافی است درایه‌های قطری را به توان رساند:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{bmatrix} a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^k \end{bmatrix}$$

اگر برای ماتریس مربعی A داشته باشیم: $A^2 + I = A$ ، ماتریس A^{1403} برابر کدام است؟

A^2 ④

$I - A$ ③

$I - A^2$ ②

$-A$ ①

نکته

دترمینان:

برای یک ماتریس مربعی مرتبه ۲ مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، دترمینان برابر است با:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



نکته

استفاده از اتحادها در ماتریس:

در صورتی که ماتریس‌های مربعی A و B طوری داده شوند که $AB = BA$ باشد، آنگاه تمام اتحادها در مورد این دو ماتریس برقرار خواهند بود. (و برعکس)

❓ اگر با اضافه کردن دو واحد به درایه‌های ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & a \end{bmatrix}$ دترمینان آن تغییر نکند، مقدار a کدام است؟

۷ ④

۵ ③

۳ ②

۱ ①

نکته

▪ اولین درایه‌ی سطر دوم ۴ است. علامت شروع محاسبات توسط شماره‌ی سطر و ستون این درایه که ۲ و ۱ هستند، تعیین می‌شود:

$$(-1)^{2+1} = -1 \rightarrow \text{اولین علامت منفی است.}$$

▪ از ماتریس A ، سطر و ستونی که درایه‌ی ۴ در آن قرار دارد را حذف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

درایه‌ی ۴ و دترمینان ماتریس 2×2 بالا با علامت منفی یا مثبت مرحله‌ی قبل در هم ضرب می‌شوند:

$$-(4) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -4(2 \times 9 - 3 \times 8) = 24$$

▪ برای دو درایه‌ی دیگر ۵ و ۶ واقع در سطر دوم نیز مقادیر مانند بالا حساب شده و سه عدد حاصل با هم جمع می‌شوند تا دترمینان ماتریس حساب شود.

❓ اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -a \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix}$ برابر ۸ باشد، مقدار a کدام است؟

۳ ④

۲ ③

۴ ②

۱ ①

نکته ۳

روش ساروس:

❖ ستون‌های اول و دوم ماتریس را دوباره به ترتیب در سمت راست آن بنویسید:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

از سمت چپ، سه قطر اصلی و از سمت راست، سه قطر فرعی در آن مشخص کنید.

سپس:

- درایه‌های هر کدام از سه قطر اصلی را در هم ضرب کرده و سه عدد حاصل را جمع می‌کنیم.
- درایه‌های هر قطر فرعی را هم ضرب کرده و سه عدد حاصل را جمع می‌کنیم.
- ❖ در پایان عدد دوم از عدد اول کم می‌شود.

❓ مساحت محدود به نمودار معادله‌ی $\begin{vmatrix} x & y & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ و محورهای مختصات کدام است؟

۳۴ ④

$\frac{100}{3}$ ③

$\frac{50}{3}$ ②

۱۶ ①



نکته

ویژگی ۱:

بدیهی است که:

اگر تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون صفر باشند، دترمینان برابر صفر است.

در حالت خاص:

$$|\overline{O}| = 0$$

نکته

ویژگی ۲:

مانند مثال قبل، اگر تمامی درایه‌های بالا یا تمامی درایه‌های پایین قطر اصلی صفر باشند:

دترمینان برابر است با ضرب درایه‌های قطر اصلی.

نکته

ویژگی ۳:

اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند:

$$|AB| = |A| \times |B|$$

توجه کنید:

در مورد دترمینان جمع و تفریق ماتریس‌ها، روابطی مشابه ضرب برقرار نیست:

$$|A+B| \neq |A| + |B| \quad \text{و} \quad |A-B| \neq |A| - |B|$$

❓ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ داده شده، دترمینان ماتریس $(A^3 - A^4)$ کدام است؟

- ① -۱ ② -۴ ③ -۹ ④ -۱۶

❓ اگر A و B دو ماتریس مربعی، $AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ و $BA = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & a \end{bmatrix}$ باشند، مقدار a کدام است؟

- ① -۲ ② ۲ ③ ۱ ④ -۱

❓ اگر $|A| = -3$ و تساوی $(A - I)^3 = I + 3A - 2A^2$ برقرار باشد، $|A^3 - 2I|$ کدام است؟

- ① ۹ ② -۹ ③ -۲۷ ④ ۲۷